

2025年

東大数学

文系第1問 ①

(1)

$$y = x^2 \text{ から } y' = 2x$$

たのび、点Pにおける

接線の傾きは  $2a$

$a > 0$  に注意して、

Qの傾きは  $-\frac{1}{2a}$  たのび

$$Q: y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2$$

CとQを連立して、

$$x^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2$$

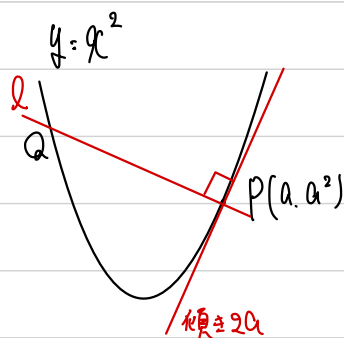
$$x^2 - a^2 + \frac{1}{2a}(x-a) = 0$$

$$(x+a)(x-a) + \frac{1}{2a}(x-a) = 0$$

$$(x-a)(x+a + \frac{1}{2a}) = 0$$

Qのx座標は  $x \neq a$  の方たのび

$$x = -a - \frac{1}{2a} \quad \#$$



Qと  $y = x^2$  の交点として、 $x = a$  がわかれ、  
いるので、 $(x-a)$  は  
展開しないままに  
しておく

ちゃんと  
 $x-a$  が  
共通因数として  
出てくる

(2)

点Pから点Qを作る方法と、

点Qから点Rを作る方法は

全く同じ。

$$b = -a - \frac{1}{2a} \text{ とすると、}$$

お入し  
文字に代入して  
計算して出す

$$P \text{ の } x \text{ 座標 } a \text{ に対し } Q \text{ の } x \text{ 座標 } -a - \frac{1}{2a}$$

$$Q: \quad b: \quad R: \quad -b - \frac{1}{2a}$$

とたのび

ちなみに  $a > 0$  たのび

$$b = -a - \frac{1}{2a} < 0$$

Rのx座標は

$$-b - \frac{1}{2b} \quad \dots \textcircled{A}$$

①と②のどっち  
使った解ける

$$= -\left(a - \frac{1}{2a}\right) - \frac{1}{2\left(-a - \frac{1}{2b}\right)}$$

$$= a + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a + \frac{1}{a}}$$

$$= \frac{2a^2 + 1}{2a} + \frac{a}{2a^2 + 1} \quad \dots \textcircled{B}$$

※ さらに通分してもいいが、複雑すぎるので、一旦やめておく。

解法1-①: ①を使て相乗相乗

$$(R \text{ の } x \text{ 座標}) = -b - \frac{1}{2b} \quad \because b < 0 \text{ より } (-b) > 0 \quad \left(\frac{1}{-2b}\right) > 0$$

相乗相乗平均の関係から

$$-b - \frac{1}{2b} \geq 2 \sqrt{(-b) \times \left(\frac{1}{-2b}\right)} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

等号成立条件は

$$-b = -\frac{1}{2b} \quad b^2 = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } (\because b < 0)$$

bの値はわかち、aが存在すること示せていけるので

aを求め

$$b = -a - \frac{1}{2a} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ とたのび } a \text{ が存在すること示す}$$

$$a + \frac{1}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2a^2 + 1 = \sqrt{2}a \quad 2a^2 - \sqrt{2}a + 1 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \times 2 \times 1}}{4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-6}}{4} \quad \leftarrow \text{虚数解にたのび}$$

$a > 0$  の実数として得られなから、 $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  とたのび  
bが存在しないといふこと。

といふことは、Rのx座標の最小値  $= \sqrt{2}$  とたのびbが存在しない

といふこと。しかし相乗相乗では求められ。

別の方法で求められはたのびない。

2025年

東大数学

文系第1問 (2)

より道 スタート

解法1-③: ③を使て相加相乗

$$(R, a \text{ 座標}) = \frac{2a^2+1}{2a} + \frac{a}{2a^2+1} \quad \because a > 0 \text{ かつ } a \neq 1$$

相加相乗平均の関係から

$$\frac{2a^2+1}{2a} + \frac{a}{2a^2+1} \geq 2 \sqrt{\frac{2a^2+1}{2a} \times \frac{a}{2a^2+1}} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

等号成立条件は

$$\frac{2a^2+1}{2a} = \frac{a}{2a^2+1} \quad (2a^2+1)^2 = 2a^2 \quad 2a^2+1 = \sqrt{2}a$$

$$2a^2 - \sqrt{2}a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-8}}{4} \quad \text{やはり虚数解}$$

③で相加相乗を用いてもやはりダメ。他の方法を検討。

どうも

過去の東大入試において、分岐関数の最大最小は、

相加相乗平均の関係を使えば解けた。

(が、この問題では、この法則が崩れてしま、ち!!)

今後、相加相乗以外の方法も使えよう

にあり

代表例は、「=k」といって、解の配置(逆像法)

解法2-④: ④で解の配置(逆像法)

$$(R, a \text{ 座標}) = -b - \frac{1}{2b} = k \text{ とおく。}$$

$$\text{分母を払う。} \quad -2b^2 - 1 = 2bk$$

$$2b^2 + 2kb + 1 = 0 \quad \dots (*)$$

bが、bの範囲内に実数解を持つようなkの範囲を求めたい。

(が、bの範囲をまだ求めていないので、一度、より道に、求める

解の配置に持ち込んた。  
逆像法の考え。

より道に

b ≤ -√2 を  
求める

方法④ 相加相乗(楽)

$$b = -a - \frac{1}{2a} \text{ かつ } -b = a + \frac{1}{2a} \text{ かつ } a > 0$$

相加相乗平均の関係より

$$-b = a + \frac{1}{2a} \geq 2 \sqrt{a \times \frac{1}{2a}} = 2 \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{等号成立条件は。} \quad a = \frac{1}{2a} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because a > 0)$$

$$\text{よって } -b \geq \sqrt{2} \quad b \leq -\sqrt{2} \quad \text{これがbの範囲}$$

※ R, a座標の最小値を求めるには、相加相乗が不可  
(対応するaが存在しない)が、bの範囲を求めるには、相加相乗が使える。  
(対応するaが存在する)

方法①: 解の配置(逆像法)

$$b = -a - \frac{1}{2a} \text{ の分母を払う。} \quad 2ab = -2a^2 - 1 \quad \text{「b=」が与えられたとき、  
なぜわざわざ「=k」とおく必要があるのか。$$

$$2a^2 + 2ba + 1 = 0$$

これから a &gt; 0 に少なくとも1解を持つにはよい。

$$f(a) = 2a^2 + 2ba + 1 \text{ とおく。}$$

$$f(a) = 2\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{2} + 1 \text{ かつ 軸: } a = -\frac{b}{2}$$

(i) 重解または2解を持つ場合。

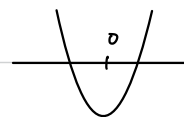
$$D \geq 0 \text{ かつ 軸} > 0 \text{ かつ } f(a) > 0$$

$$\begin{cases} D/4 \geq 0 \text{ かつ } (-b)^2 - 2 \times 1 \geq 0 & b^2 \geq 2 \\ \text{軸} > 0 \text{ かつ } -\frac{b}{2} > 0 & b < 0 \\ f(a) > 0 \text{ かつ } 1 > 0 & b \text{ は任意の実数。} \end{cases}$$

$$b^2 \geq 2 \text{ かつ } b < 0 \text{ かつ 任意の実数。} \quad b \leq -\sqrt{2}$$

(ii) a ≤ 0 と 0 &lt; a に 1解ずつ持つ場合。

$$f(0) = 1 \text{ かつ } b \text{ は解なし}$$



$$\text{以上より } b \leq -\sqrt{2} \text{ ならば 解なし かつ } a > 0$$

$$b \leq -\sqrt{2} \quad \text{これがbの範囲}$$

ここは全部bの範囲を求めたい

より道から戻り.

$$(*) \dots 2b^2 + 2kb + 1 = 0 \text{ が}$$

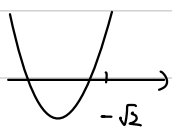
 $b \leq -\sqrt{2}$  の範囲に、少なくとも1つ解を持つことがい.

$$g(b) = 2b^2 + 2kb + 1 \text{ とおく.}$$

$$g(b) = 2\left(b + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{2} + 1 \text{ となる. 軸: } b = -\frac{k}{2}$$

(i) 重解または2解を持つ場合.

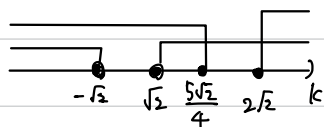
$$D \geq 0 \text{ が, 軸} \leq -\sqrt{2} \text{ が } g(-\sqrt{2}) \geq 0$$

$$\begin{cases} D/4 = (-k)^2 - 2 \times 1 \geq 0 & k^2 \geq 2 \\ \text{軸} \leq -\sqrt{2} \text{ より } -\frac{k}{2} \leq -\sqrt{2} & k \geq 2\sqrt{2} \\ g(-\sqrt{2}) \geq 0 \text{ より } 2(-\sqrt{2})^2 + 2k(-\sqrt{2}) + 1 \geq 0 \\ 4 - 2\sqrt{2}k + 1 \geq 0 \\ k \leq \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$


$$k^2 \geq 2 \text{ が, } k \geq 2\sqrt{2} \text{ が, } k \leq \frac{5\sqrt{2}}{4} \text{ より}$$

 $k$  の共通範囲はない.

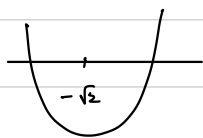
よ. 2 解なし

(ii)  $b \leq -\sqrt{2}$  と  $-\sqrt{2} < b$  に 1 解ずつ持つ場合.

$$g(-\sqrt{2}) \leq 0$$

$$g(-\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}k + 1 \leq 0$$

$$k \geq \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

以上より, 2 解なし または  $k \geq \frac{5\sqrt{2}}{4}$  となる.

$$\underline{k \geq \frac{5\sqrt{2}}{4}}$$

解法 2-③: ③ 2- 解の西を置 (逆像法)

$$(R \text{ の } x \text{ 座標}) = \frac{2a^2+1}{2a} + \frac{a}{2a^2+1} = k \text{ とおく}$$

分母を払う.

$$(2a^2+1)^2 + 2a^2 = k \times 2a(2a^2+1)$$

$$4a^4 + 4a^2 + 1 + 2a^2 = 2ka^3 + 2ka$$

$$4a^4 - 2ka^3 + 6a^2 - 2ka + 1 = 0 \quad \text{A の 4 次式 となるので, かなり大変.}$$

 $a > 0$  に 少なくとも 1 つ解を持つような  $k$  の範囲を求める.

$$h(a) = 4a^4 - 2ka^3 + 6a^2 - 2ka + 1 \text{ とおく.}$$

$$h'(a) = 16a^3 - 6ka^2 + 12a - 2k \quad \text{A 因数分解不可}$$

増減調べるのは, 挫折.